

IMPORTANCE DES EFFETS DE DISSIPATION EN ECOULEMENT TRANSSONIQUE

ANDRZEJ SZANIAWSKI

*Département de Mécanique des Fluides
Institut des Problèmes Techniques Fondamentaux
Académie Polonaise des Sciences*

ABSTRAIT

On présente les équations d'écoulement transsonique tenant compte des effets de dissipation et on les analyse en cas particulier: en écoulement dans une tuyère. On attire l'attention à l'importance de ces effets dans certains écoulements transsoniques où les petits paramètres de dissipation ne peuvent pas être éliminés. On démontre aussi l'existence des "couches dissipatives," à l'intérieur desquelles l'accélération change beaucoup entre ses valeurs extrémales.

INTRODUCTION

On sait bien que dans les écoulements réels à grande vitesse la dissipation d'énergie est considérable seulement à l'intérieur des certaines couches minces, des couches limites et des ondes de choc, qui occupent une très petite partie de l'espace. L'épaisseur de ces couches diminue avec la diminution du paramètre de dissipation δ qui, pour un gaz parfait, satisfaisant à l'équation de Clapeyron visqueux et conduisant la chaleur, va ici être défini par:

$$\delta = \delta_v + \delta_c \quad (1)$$

où

$$\delta_v = \frac{4}{3(\gamma + 1)} \frac{1}{\text{Re}} = \frac{4\kappa_v}{3(\gamma + 1)\rho^*a^*L} \quad (2)$$
$$\delta_c = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{1}{\text{Pr} \times \text{Re}} = \frac{(\gamma - 1)\kappa_c}{(\gamma + 1)C_p\rho^*a^*L}$$

- où κ_v, κ_c = les coefficients de viscosité et du transfert de chaleur
 ρ^*, a^* = la densité et la vitesse de référence
 $\gamma = c_p/c_v$ = le rapport des chaleurs spécifiques à pression constante et à volume constant
 L = la longueur caractéristique
 Re = le nombre de Reynolds
 Pr = le nombre de Prandtl

Pour résoudre les problèmes de tels écoulements où δ est très petit, on applique en général un procédé suivant. On remplace les couches minces par les surfaces de discontinuité situées dans l'écoulement "nondissipatif," on admet donc $\delta = 0$ et sur ces surfaces on exige que certaines conditions de compatibilité, comme les conditions d'Hugoniot par exemple, soient satisfaites. De l'autre côté on analyse les problèmes liés avec la structure de l'écoulement à l'intérieur des couches "dissipatives" tenant compte de l'écoulement extérieur connu.

Il faut souligner qu'un tel procédé, quoique généralement approuvé et utilisé, ne semble pas avoir un appui théorique suffisamment fort. Les effets de dissipation, en outre de l'influence sur "la structure interne des surfaces de discontinuité" pourraient aussi avoir une influence sur le placement de ces surfaces dans l'espace et sur les conditions de compatibilité qui y ont lieu. Jusqu'à présent non seulement on n'a pas prouvé que la solution "dissipative" tend avec $\delta \rightarrow 0$ vers la solution "nondissipative," mais on n'a même pas prouvé que la solution limite pour $\delta \rightarrow 0$ des équations "dissipatives" existe l'élimination de δ , même pour δ très petit, pourrait ne pas être possible.

L'application de ce schème d'élimination des paramètres de dissipation δ_v et δ_c pour déterminer approximativement les écoulements subsoniques et supersoniques semble trouver un grand appui du côté des recherches expérimentales. Ce n'est pas le même cas avec les écoulements transsoniques. En régime transsonique les expériences présentent beaucoup de difficultés et il est très difficile aussi de comparer leurs résultats avec les résultats des recherches théoriques. Dans les recherches théoriques concernant l'écoulement "nondissipatif" on trouve souvent des difficultés essentielles pour résoudre beaucoup des problèmes fondamentaux.

A l'opinion de l'auteur le schème même d'élimination de δ peut ne pas être applicable à l'analyse de l'écoulement transsonique. Faire attention à la possibilité d'une corrélation plus symétrique entre la structure interne des "couches dissipatives" et l'écoulement extérieur, c'est le but principal de l'article. Aussi on va attirer l'attention à l'existence des couches dissipatives qui ne sont ni les ondes de choc ni les couches limites aux parois.

Pour prouver que le paramètre de dissipation δ ne peut pas être éliminé de certaines solutions transsoniques, il suffit de présenter seulement un

exemple approuvant cette hypothèse. C'est ainsi qu'on va faire. Après la présentation des équations transsoniques tenant compte des effets de dissipation, on va s'occuper d'un cas particulier: de l'écoulement transsonique plan et symétrique, pour lequel l'équation de l'une des lignes ducourant est connue. Un tel écoulement peut être réalisé à l'intérieur d'une tuyère transsonique à contour donné, si l'on néglige l'existence de la couche limite aux parois.

Il serait intéressant de présenter un exemple analogue pour l'écoulement extérieur autour d'un profil donné, mais les équations obtenues présentent des si grandes difficultés à résoudre qu'on n'a pas encore réussi de trouver quelconque de leurs solutions décrivant l'écoulement extérieur.

EQUATIONS DE L'ÉCOULEMENT TRANSSONIQUE

L'écoulement transsonique stationnaire peut être considéré comme un écoulement homogène avec la vitesse du son, qui est soumis au champs des petites perturbations. La vitesse $\vec{u}(x, x_1, x_2)$, ses composantes seront désignées par u, u_1, u_2 , la densité $\rho(x, x_1, x_2)$, l'entropie spécifique $s(x, x_1, x_2)$, la pression $p(x, x_1, x_2)$, la température $T(x, x_1, x_2)$, et la vitesse du son $a(x, x_1, x_2)$ x, x_1, x_2 les coordonnées cartésiennes de l'espace doivent donc être très proches aux valeurs constantes: $\vec{u}^*(a^*, 0, 0), \rho^*, s^*, p^*, T^*, a^*$, correspondant à l'écoulement homogène de référence. En aide d'un petit paramètre τ , caractérisant les amplitudes de perturbation, on peut introduire la transformation transsonique des coordonnées [1, 2]:

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \xi_i = \sqrt{\tau} \frac{x_i}{L} \quad (i = 1, 2) \tag{3}$$

et on peut développer les fonctions $\Phi - x, \nu_1, \nu_2, \mu, \sigma$, définies par les formules [3]:

$$\begin{aligned} \frac{u}{a^*} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x}, & \frac{u_i}{a^*} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \nu_i \quad (i = 1, 2) \\ \frac{\rho u}{\rho^* a^*} - 1 &= \mu, & \frac{s - s^*}{c_p} &= (\gamma + 1) \delta_c (-L \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \sigma) \end{aligned} \tag{4}$$

en séries de puissances de τ :

$$\begin{aligned} \Phi(x, x_1, x_2) - x &= \tau L [\varphi^{(1)}(\xi, \xi_1, \xi_2) + \tau \varphi^{(2)}(\xi, \xi_1, \xi_2) + \dots] \\ \nu_i(x, x_1, x_2) &= \tau^{5/2} [\nu_i^{(2)}(\xi, \xi_1, \xi_2) + \dots] \quad (i = 1, 2) \\ \mu(x, x_1, x_2) &= \tau^2 [\mu^{(2)}(\xi, \xi_1, \xi_2) + \dots] \\ \sigma(x, x_1, x_2) &= \tau^2 [\sigma^{(2)}(\xi, \xi_1, \xi_2) + \dots] \end{aligned} \tag{5}$$

Pour déduire les équations d'écoulement transsonique on substitue les développements (5) dans les équations générales du mouvement et on compare les coefficients auprès des puissances de τ , cf. Refs. 1 et 6.

Pour obtenir à cette manière la bien connue équation transsonique, cf. Refs. 1 et 2:

$$\frac{\partial^2 \overset{(1)}{\varphi}}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \overset{(1)}{\varphi}}{\partial \xi_2^2} - (\gamma + 1) \frac{\partial \overset{(1)}{\varphi}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \overset{(1)}{\varphi}}{\partial \xi^2} = 0 \quad (6)$$

il faut supposer:

- (a) que les paramètres de dissipation sont nuls $\delta_v = \delta_c = \delta = 0$,
- (b) que l'écoulement est isentropique et potentiel $\sigma = \nu_1 = \nu_2 = 0$
- (c) que les termes d'ordre supérieur en τ sont négligeables.

En substituant l'Éq. (4) $\Phi = x + L\tau(\overset{(1)}{\varphi} + \epsilon \overset{(2)}{\varphi} + \dots)$ dans l'équation d'écoulement potentiel:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{\gamma + 1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 - 1 \right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\gamma - 1}{2} \left\{ \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 - 1 \right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_i} \right. \\ \left. + \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_k \partial x_k} \right) \right\} \\ - 2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial x_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_k} = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

on obtient en première approximation transsonique l'Éq. (6) la convention de l'index de sommation muet est appliquée seulement pour $i, k = 1, 2$.

A la même manière peuvent être déduites les équations transsoniques tenant compte des effets de dissipation [3-5], seulement il faut supposer:

- (a) que le rapport

$$\epsilon = \frac{\delta}{\tau} \quad (8)$$

ne tend pas vers l'infini avec $\tau \rightarrow 0$ dans les écoulements réels ϵ est presque toujours très petit

- (b) qu'en amont l'écoulement est homogène et potentiel, donc les fonctions: \vec{u}, ρ, s doivent tendre avec $x \rightarrow -\infty$ vers les valeurs constantes.

En substituant maintenant $u = a^* \partial\Phi/\partial x$, $u_i = a^*(\partial\Phi/\partial x_i + v_i)$, $\rho = \rho^*\mu(\partial\Phi/\partial x)^{-1}$, $s = s^* + C_p(\gamma + 1)\delta_c(-L\partial^2\Phi/\partial x^2 + \sigma)$ dans les équations générales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\rho u}{\partial x} + \frac{\partial\rho u_i}{\partial x_i} &= 0 \\ \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x} &= \kappa_v \left(\frac{4}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x \partial x_i} \right) \\ \rho u \frac{\partial u_k}{\partial x} + \rho u_i \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_k} &= \kappa_v \left[\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_i} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \right] \quad (9) \\ \rho u \frac{\partial s}{\partial x} + \rho u_i \frac{\partial s}{\partial x_i} &= \frac{\kappa_c}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i} + \\ &\quad \kappa_v \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)^2 \right] \\ p &= p^* \left(\frac{\rho}{\rho^*} \right)^\gamma e^{(s-s^*)/c_p}, \quad T = T^* \left(\frac{\rho}{\rho^*} \right)^{\gamma-1} e^{(s-s^*)/c_p} \end{aligned}$$

et en y introduisant les développements (5) on obtient un système des équations, laissant trouver successivement les approximations transsoniques de l'écoulement. Ainsi on obtient en première approximation une équation nonlinéaire cf. Refs. 3-5:

$$\frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial \xi_i \partial \xi_i} - (\gamma + 1) \left(\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial \xi^2} - \epsilon \frac{\partial^3 \varphi^{(1)}}{\partial \xi^3} \right) = 0 \quad (10)$$

et en n -ième approximation suivante $n > 1$ un système des équations linéaires, cf. Ref. 5:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu^{(n)}}{\partial \xi} &= M^{(n)}(\xi, \xi_1, \xi_2) \\ \frac{\partial v_i^{(n)}}{\partial \xi} &= N_i^{(n)}(\xi, \xi_1, \xi_2) - \frac{\partial \mu^{(n)}}{\partial \xi_i} \quad (i = 1, 2) \\ \frac{\partial \sigma^{(n)}}{\partial \xi} &= S^{(n)}(\xi, \xi_1, \xi_2) + \frac{\partial^2 \mu^{(n)}}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 \varphi^{(n)}}{\partial \xi_i \partial \xi_i} - (\gamma + 1) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi^{(n)}}{\partial \xi} - \epsilon \frac{\partial^2 \varphi^{(n)}}{\partial \xi^2} \right) &= \mathcal{F}^{(n)}(\xi, \xi_1, \xi_2) \quad (11) \\ &\quad + \epsilon_c \frac{\partial \sigma^{(n)}}{\partial \xi} - \frac{\partial v_i^{(n)}}{\partial \xi_i} - (\gamma - 1) \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial \xi^2} \mu^{(n)} \end{aligned}$$

où les fonctions M, N_i, S, \mathfrak{F} sont déterminées par les solutions des approximations précédentes et $\epsilon_c = \delta_{c/T}$.

On peut appliquer encore une fois le même procédé pour déduire les équations de l'écoulement plan et symétrique envers l'axe x , cf. Ref. 6. En supposant ici que la fonction $\nu^{(k)}(\xi, \eta) \equiv \nu_1^{(k)}(\xi, \xi_1, \xi_2)$ peut être développée en séries des puissances impaires de $\eta = \sqrt{\tau} y/L$, $y \equiv x_1$ et $\eta \equiv \xi_1$:

$$\begin{aligned} \nu^{(k)}(\xi, \eta) &\equiv \nu_1^{(k)}(\xi, \xi_1, \xi_2) \\ \nu^{(k)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{1!} \nu_\eta^{(k)}(\xi, 0) \eta + \frac{1}{3!} \nu_{\eta\eta\eta}^{(k)}(\xi, 0) \eta^3 + \dots \quad (12) \\ &= \frac{\sqrt{\tau}}{1!} \nu_\eta^{(k)} \frac{y}{L} + \frac{\sqrt{\tau^3}}{3!} \nu_{\eta\eta\eta}^{(k)} \left(\frac{y}{L}\right)^3 + \dots \quad (k = 2, 3 \dots) \end{aligned}$$

et que les fonctions $\varphi^{(1)}(\xi, \eta), \varphi^{(2)}(\xi, \eta), \mu^{(2)}(\xi, \eta), \sigma^{(2)}(\xi, \eta), \dots$ peuvent être développées à la même manière en séries des puissances paires, comme, par exemple:

$$\varphi^{(1)}(\xi, \eta) = \varphi^{(1)}(\xi, 0) + \frac{\tau}{2!} \varphi_{\eta\eta}^{(1)}(\xi, 0) \left(\frac{y}{L}\right)^2 + \dots \quad (13)$$

on obtient au moyen de l'Éq. (5) les développements:

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \Phi &= \xi + \tau \varphi^{(1)}(\xi, 0) + \tau^2 \left[\varphi^{(2)}(\xi, 0) + \frac{1}{2!} \varphi_{\eta\eta}^{(1)}(\xi, 0) \left(\frac{y}{L}\right)^2 \right] + \dots \\ \nu &= \tau^3 \nu_\eta^{(2)}(\xi, 0) \frac{y}{L} + \dots \quad (14) \\ \mu &= \tau^2 \mu^{(2)}(\xi, 0) + \dots \\ \sigma &= \tau^2 \sigma^{(2)}(\xi, 0) + \dots \end{aligned}$$

où les coefficients auprès de τ sont les polynômes de y .

En substituant l'Éq. (14) dans les Éqs. (9) et en comparant les coefficients auprès des puissances de τ et y on obtient en première approximation une équation nonlinéaire:

$$\varphi_{\eta\eta}^{(1)} - (\gamma + 1) \left[\frac{1}{2} \left(\varphi^{(1)'} \right)^2 - \epsilon \varphi^{(1)''} \right]' = 0 \quad (15)$$

et une série des équations linéaires, cf. Refs. 6 et 7, qui ne seront pas ici être présentées et utilisées.

Il faut souligner que pour connaître en première approximation les paramètres d'écoulement plan et symétrique:

$$\frac{\mu}{a^*} = \frac{\rho^*}{\rho} = 1 + \tau \varphi^{(1)'}(\xi, 0)$$

$$\frac{v}{a^*} = \tau^2 \varphi_{\eta\eta}^{(1)}(\xi, 0) \frac{y}{L} \tag{16}$$

$$\frac{s - s^*}{C_p} = - (\gamma + 1) \epsilon_c \tau^2 \varphi^{(1)''}(\xi, 0)$$

il suffit de connaître seulement deux fonctions $\varphi_{\eta\eta}^{(1)}(\xi, 0)$ et $\varphi^{(1)'}(\xi, 0)$ d'une variable indépendante ξ . On a ainsi réussi à réduire le problème bidimensionnel au problème "unidimensionnel." Pour résoudre ce problème il faut encore prendre en considération les conditions aux limites qui laissent trouver la deuxième équation pour les deux fonctions inconnues $\varphi_{\eta\eta}^{(1)}$ et $\varphi^{(1)'}$.

ÉCOULEMENT DANS LA TUYÈRE SYMÉTRIQUE

Considérons maintenant un écoulement transsonique plan et symétrique envers l'axe x , pour lequel l'une des lignes du courant est donnée par l'équation

$$\frac{y_w}{L} = 1 + \frac{\gamma + 1}{2} \tau^2 f^2(\xi) \tag{17}$$

où la fonction continue $f(\xi)$ satisfait aux conditions $f(-\xi) = -f(\xi)$ et $f'(0) = 1$.

Un tel écoulement peut être réalisé à l'intérieur d'une tuyère symétrique envers les axes x et y avec les parois lisses sans couche limite, situées aux deux côtés de l'axe de symétrie x (Ref. 7), la fonction $f(x/L)$ et les paramètres τ et L peuvent être choisis ainsi que l'Éq. (17) décrit le contour de la tuyère symétrique et que pour $x = 0$ la largeur minimum soit égale à $2L$.

On va s'occuper seulement de la première approximation transsonique en deux cas d'écoulement dans la tuyère: (A) l'écoulement accéléré de la vitesse subsonique à la vitesse supersonique la tuyère de Laval, et (B) l'écoulement ralenti de la vitesse supersonique à la vitesse subsonique le diffuseur.

La fonction $y_w(x)$ doit vérifier l'équation différentielle des lignes du courant $dy_w/dx = v(x, y_w)/u(x, y_w)$, qui, tenant compte des Éqs. (4) et (17), peut être écrite en forme:

$$\frac{\partial \Phi(x, y_w)}{\partial y} + v(x, y_w) = (\gamma + 1)\tau^2 f\left(\frac{x}{L}\right) f'\left(\frac{x}{L}\right) \frac{\partial \Phi(x, y_w)}{\partial x} \quad (18)$$

En y substituant les développements (14) on en obtient par la comparaison des coefficients auprès de τ^2 la première fonction inconnue

$$\varphi_{\eta\eta}^{(1)}(\xi, 0) = (\gamma + 1)f(\xi)f'(\xi) \quad (19)$$

les approximations successives de Éq. (18) ne seront ici être ni présentées ni utilisées.

La deuxième fonction inconnue $\varphi^{(1)'(\xi, 0)$ doit, d'après Éq. (15), satisfaire l'équation différentielle

$$2\epsilon[(\varphi^{(1)'})' + c] = (\varphi^{(1)'})^2 - f^2 \quad (20)$$

avec la constante arbitraire c . Cette constante est choisie ainsi que les solutions "nondissipatives" $\epsilon = 0$ et continues:

$$\tilde{\varphi}_A^{(1)'} = f, \quad \tilde{\varphi}_B^{(1)'} = -f \quad (21)$$

décrivent les deux cas considérés: (A) et (B), Fig. 1.

Pour ne pas compliquer le problème, on va considérer seulement des tels écoulements, qui sont décrits par les fonctions impaires de ξ :

$$\varphi^{(1)'(-\xi, 0) = -\varphi^{(1)'(\xi, 0)} \quad (22)$$

cela est possible, parce que $f(-\xi) = -f(\xi)$. Dans ce cas il suffit de connaître la solution $\varphi^{(1)'}$ seulement de l'un côté de l'axe y pour $\xi > 0$ par exemple, et pour $\xi = 0$ elle doit satisfaire la condition

$$\varphi^{(1)'(0, 0) = 0 \quad (23)$$

On va chercher les deux solutions $\varphi_A^{(1)'}$ et $\varphi_B^{(1)'}$ de l'Éq. (20) satisfaisant les conditions aux limites de l'Éq. (23) et

$$\varphi_A^{(1)'(\xi_0, 0) = f(\xi_0), \quad \varphi_B^{(1)'(\xi_0, 0) = -f(\xi_0) \quad (24)$$

et on va se demander à quelle condition ces solutions tendent dans la gorge de la tuyère $-\xi_0 < \xi < \xi_0$ vers les solutions "nondissipatives" $\varphi_A^{(1)'} = f(\xi)$ et $\varphi_B^{(1)'} = -f(\xi)$.

L'application de la théorie des équations différentielles avec un petit paramètre auprès de la dérivée supérieure laisse démontrer que chaque solution de l'Éq. (20), satisfaisant la condition $\varphi'(\xi_0, 0) = f(\xi_0)$, tend vers la fonction $f(\xi)$ pour $0 < \xi < \xi_0$ et que chaque solution de l'Éq. (20) satisfaisant la condition $\varphi'(\xi_0, 0) = -f(\xi)$ tend vers la fonction $-f(\xi)$ pour $\xi > \xi_0 > 0$ (Fig. 1). Donc

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \varphi_a^{(1)'}(\xi, 0) = f(\xi) \quad (-\xi_0 < \xi < \xi_0) \quad (25)$$

et

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \varphi_b^{(1)'}(\xi, 0) = -f(\xi) \quad (\xi > \xi_0 > 0 \text{ et } \xi < -\xi_0) \quad (26)$$

On voit bien la différence entre les solutions $\varphi_A^{(1)'}$ et $\varphi_B^{(1)'}$. Les conditions en amont $\varphi_A^{(1)'(-\xi_0, 0) = f(-\xi)$ et en aval $\varphi_A^{(1)'(\xi_0, 0) = f(\xi_0)$ déterminent les

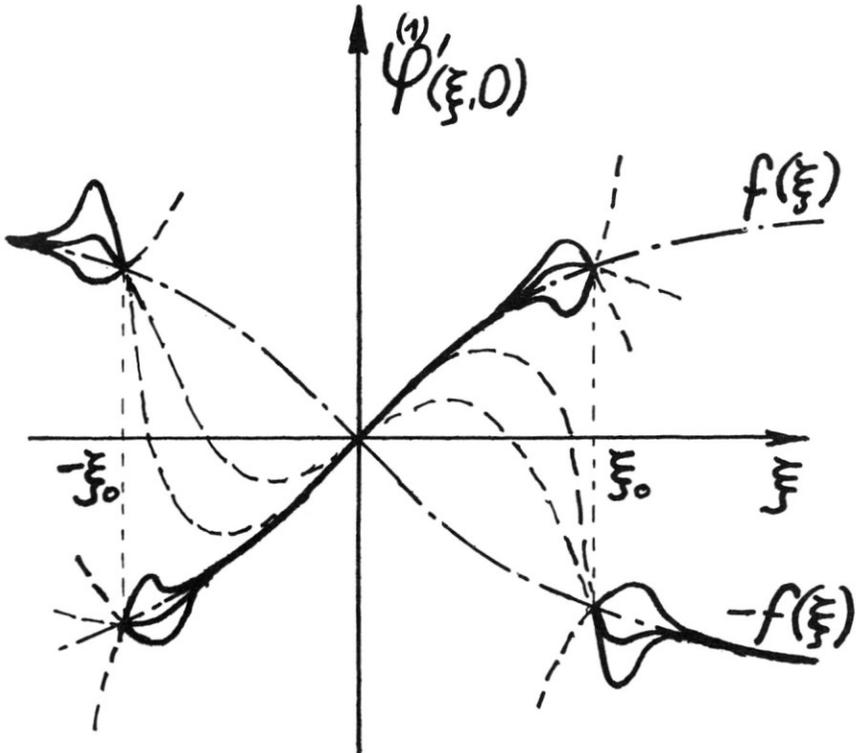


Figure 1.

paramètres d'écoulement u, ρ, s , Éq. (16) à l'intérieur de la tuyère par la fonction $\varphi_A^{(1)'} qui peut être approchée par $\varphi_A^{(1)'} = f(\xi)$. Ce n'est pas le même cas avec la solution $\varphi_B^{(1)'}$. Pour qu'on soit certain que $\varphi_B^{(1)'}$ tend vers $-f(\xi)$ au voisinage de $\xi = 0$, on doit déplacer le point $\xi = \xi_0$ vers le centre $\xi = 0$ ou on doit remplacer la condition "nondissipative" Éq. (24) $\varphi_B^{(1)'(\xi_0, 0) = -f(\xi_0)$ par une condition "dissipative":$

$$\varphi_B^{(1)'(\xi_0, 0) = -f(\xi_0) + \bar{\beta}_0(\epsilon) \quad (\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \bar{\beta}_0 = 0)$$

Comment cette nouvelle solution $\varphi_B^{(1)'}$ peut être trouvée, on va le démontrer ensuite.

La solution $\varphi_B^{(1)'}$ qui doit tendre avec $\epsilon \rightarrow 0$ vers $\varphi_B^{(1)' = -f(\xi)$ peut être présentée en forme:

$$\varphi_B^{(1)' = -f(\xi) + \bar{\beta}(\xi, \epsilon) \quad (27)$$

où la fonction $\bar{\beta}$ doit satisfaire l'équation différentielle

$$2\epsilon(\bar{\beta}' - f' + c) = (-2f + \bar{\beta})\bar{\beta} \quad (28)$$

(cf. Éq. 20) et on va exiger qu'elle satisfasse les conditions aux limites:

$$\bar{\beta}(0) = 0, \quad \bar{\beta}'(0) = 2\alpha \quad (29)$$

où α est une constante arbitraire. On va maintenant chercher seulement une solution asymptotique continue $\bar{\beta}(\xi, \epsilon)$ qui tend vers zéro avec $\epsilon \rightarrow 0$.

L'application de la théorie présentée dans Ref. 8 laisse trouver la solution asymptotique

$$\bar{\beta} = \epsilon \frac{f'(\xi) - c}{f(\xi)} \quad (|\xi| \gg \sqrt{\epsilon}) \quad (30)$$

seulement à l'extérieur du voisinage du point $\bar{\beta} = \xi = 0$ du point singulier de l'équation "nondissipative" $(-2f + \bar{\beta})\bar{\beta} = \text{const}$. Au voisinage même de ce point on peut transformer les variables [7]

$$\xi = \sqrt{2\epsilon} \zeta, \quad \bar{\beta} = \sqrt{2\epsilon} \beta(\zeta) \quad (31)$$

et, en rejetant dans Éq. (28) les termes de l'ordre supérieur de ϵ , on obtient l'équation différentielle

$$\beta' = \beta(\beta - 2\zeta) + 1 - c \quad (32)$$

La solution continue $\beta(\zeta)$ de cette équation, tenant compte des conditions aux limites (29), peut être présentée en forme:

$$\beta(\zeta) = 2\alpha \frac{F\left(\frac{1-\alpha}{2}, \frac{3}{2}, \zeta^2\right)}{F\left(\frac{1-\alpha}{2}, \frac{1}{2}, \zeta^2\right)} \zeta, \tag{33}$$

où

$$\frac{1-c}{2} = \alpha < 1 \tag{34}$$

pour les autres valeurs de α la solution $\varphi_B^{(1)}$ devient discontinue, et $F(a,c,z)$ est une fonction hypergéométrique conflente, définie par le développement

$$F(a, c, z) = 1 + \frac{a}{c} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots \tag{35}$$

l'analyse détaillée de l'entourage du point singulier $\bar{\beta} = \xi = 0$ va paraître prochainement dans l'article écrit par l'auteur avec J. Kopystynski.

Les résultats obtenus peuvent être maintenant après la substitution de l'Éqs. (30) et (33) dans Éq. (27) présentés en forme de la formule asymptotique, pour ϵ suffisamment petit:

$$\varphi_B^{(1)}(\xi, 0) = \chi_{\text{ext}}(\xi) + \chi_{\text{int}}(\xi) \tag{36}$$

où

$$\chi_{\text{ext}} = -f(\xi) + \epsilon \left\{ \frac{f'(\xi) - 1}{f(\xi)} + 2\alpha \left[\frac{1}{f(\xi)} - \frac{1}{\xi} \right] \right\} \tag{37}$$

est une solution extérieure qui devient nulle au voisinage du point $\xi = 0$ et

$$\chi_{\text{int}} = 2\alpha \frac{F\left(\frac{1-\alpha}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\xi^2}{2\epsilon}\right)}{F\left(\frac{1-\alpha}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\xi^2}{2\epsilon}\right)} \xi \tag{38}$$

est une solution intérieure qui décrit l'entourage proche de ce point (Fig. 2) et qui à l'extérieur pour $|\xi| \rightarrow \infty$ tend vers zéro comme $2\alpha\epsilon/\xi$.

Les mêmes résultats peuvent être obtenus pour un autre problème aux limites "extérieure":

$$\varphi_B^{(1)}(\xi_0, 0) = -f(\xi) + \bar{\beta}_0 \quad (|\xi|_0 \gg \sqrt{\epsilon}) \tag{39}$$

[cf. Éq. (24)]. Dans ce cas, tenant compte de l'Éqs. (30) et (34), on trouve la valeur de α :

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[1 - f'(\xi_0) + \frac{\bar{\beta}_0}{\epsilon} f(\xi_0) \right] \quad (40)$$

Mais pour que $\varphi_B^{(1)}$ soit une fonction continue qui tend avec $\epsilon \rightarrow 0$ vers $-f(\xi)$, α doit être plus petit que l'unité (34), donc aussi $\bar{\beta}_0$ doit satisfaire l'inégalité:

$$\bar{\beta}_0 f(\xi_0) < \epsilon [1 + f'(\xi_0)] \quad (41)$$

Il en résulte que, même pour $\bar{\beta}_0$ très petit et convergeant avec $\epsilon \rightarrow 0$ vers zéro l'inégalité (41) peut ne pas être satisfaite et la solution $\varphi_B^{(1)}$ peut ne pas tendre vers $-f(\xi)$. Dans ce cas la solution $\varphi_B^{(1)}$ va tendre vers une fonction discontinue avec les ondes de choc et la position de la surface de discontinuité peut dépendre du petit paramètre de dissipation. (L'analyse détaillée de ce cas va paraître prochainement.)

Comme en écoulement accéléré les effets de dissipation jouent un rôle secondaire, on va analyser les résultats obtenus pour l'écoulement ralenti.

Avant tout il faut attirer l'attention à la solution intérieure χ_{int} (38) qui décrit une nouvelle "couche dissipative sonique." Cette couche n'empêche pas que les paramètres d'écoulement u, v, ρ, s , Éq. (16) soient continus

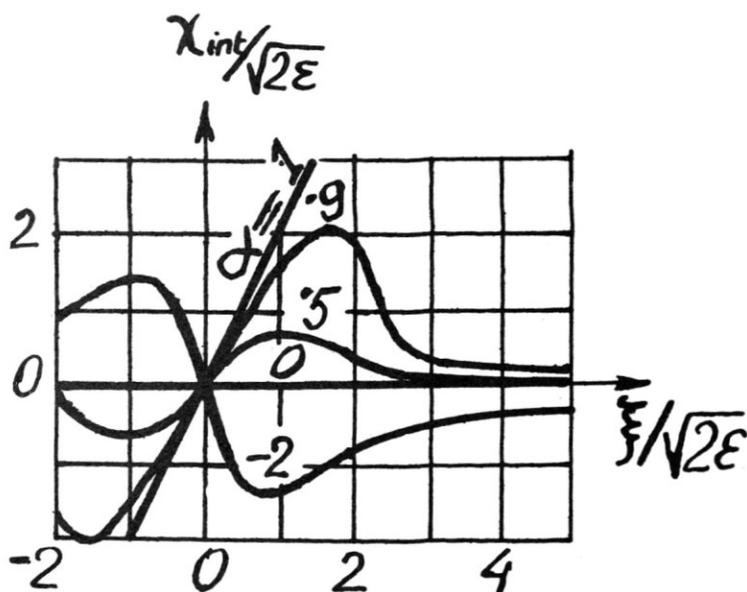


Figure 2.

pour $\epsilon \rightarrow 0$, mais à son intérieur les dérivées de ces paramètres peuvent atteindre des valeurs considérables et même elles peuvent devenir infiniment grandes. Par exemple, pour $\xi \approx 0$ la dérivée de la vitesse

$$\frac{du}{dx} = \tau \frac{a^*}{L} \varphi_B^{(1)''}(\xi, 0) \approx \tau \frac{a^*}{L} [-1 + \chi_{int}'] \quad (42)$$

peut changer beaucoup entre ses valeurs extrémales ne diminuant pas avec $\epsilon \rightarrow 0$. Pour $\alpha \rightarrow 1$ et $\alpha \rightarrow -\infty$ les valeurs minimales $(\chi_{int})_{min}$ tendent vers $-\infty$ (Fig. 3).

La structure interne de la couche considérée dépend de la valeur de la constante "intérieure" α qui peut être introduite, au moyen de l'Éq. (40), dans la condition "extérieure," Éq. (39). Pendant que pour $\alpha = 0$ cette couche disparaît, le petit paramètre de dissipation ϵ reste dans la condition (39). Si la condition (39) ou (24) ne contient pas ce paramètre, on obtient $\alpha \neq 0$ et la couche dissipative doit exister.

L'importance des effets de dissipation est encore plus grande dans le cas où la constante $\bar{\beta}_0$ ne satisfait pas l'inégalité (41). La différence $\varphi_B^{(1)'} - (-f)$ entre la solution "dissipative" et la solution "nondissipative" peut alors rester considérable et la solution limite de $\varphi_B^{(1)'}$ devient discontinue.

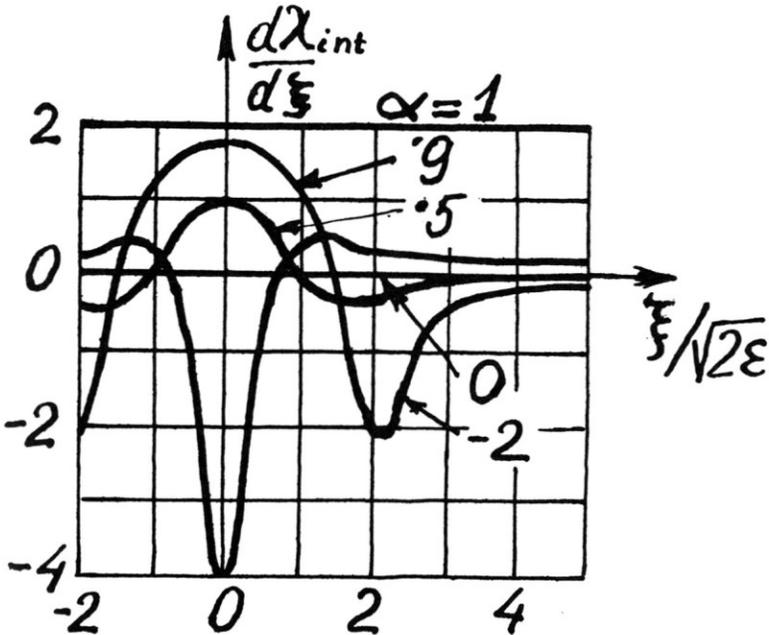


Figure 3.

CONCLUSIONS

On sait bien, que l'écoulement à l'intérieur de la tuyère est réalisé par la réalisation des certaines conditions à l'extérieur: en amont et en aval. Ainsi pour décrire cet écoulement on cherche une solution du problème aux limites extérieur. L'analyse d'une telle solution pour l'écoulement ralenti dans une tuyère symétrique laisse tirer des conclusions suivantes.

Si le paramètre de dissipation ϵ ou $\delta = \epsilon\tau$ est très petit, l'écoulement interne est très sensible aux petits changements des conditions aux limites de la valeur $\bar{\beta}_0$ (39). Pour $\bar{\beta}_0$ satisfaisant l'inégalité (41) les effets de dissipation causent l'apparition d'une mince "couche dissipative sonique" où les dérivées des paramètres d'écoulement peuvent atteindre des valeurs très grandes. Si $\bar{\beta}_0$, même étant très petit et convergeant vers zéro avec $\epsilon \rightarrow 0$, ne satisfait pas l'inégalité (41), l'écoulement dévient discontinu avec les ondes de choc faibles et les effets de dissipation n'y doivent pas être négligés.

On peut espérer que non seulement dans la tuyère, mais aussi en écoulement transsonique extérieur les phénomènes analogues doivent aussi avoir lieu. Au voisinage proche des tels points transsoniques où $\partial\varphi^{(1)}/\partial\xi = \partial^2\varphi^{(1)}/\partial\xi^2 = 0$, le terme $(\partial\varphi^{(1)}/\partial\xi)(\partial^2\varphi^{(1)}/\partial\xi^2)$ de l'Éq. (10) peut être très petit de l'ordre bien supérieur que le terme $\epsilon \partial^3\varphi^{(1)}/\partial\xi^3$ qui est en général négligé. Ces points doivent aussi être entourés par une couche sonique où les effets de dissipation doivent être pris en considération.

Il est difficile à répondre, dans quels écoulements les effets de dissipation peuvent être négligés. Par l'analyse détaillée de la corrélation entre l'écoulement extérieur et la structure interne des couches dissipatives on pourrait peut être obtenir des critères plus précis pour déterminer les problèmes où le rôle de la dissipation d'énergie est prédominant.

REFERENCES

1. Guderley, K. G., *Theorie schallnaher Strömungen* (Berlin: Springer, 1957).
2. Ferrari, C., et F. G. Tricomi, *Aerodinamica transonica* (Roma: Edizioni Cremonese, 1962).
3. Szaniawski, A., *Archiwum Mechaniki Stosowanej*, 6, 15 (1963).
4. Sichel, M., *Phys. of Fluids*, 5, 6 (1963).
5. Szaniawski, A., *Arch. Mech. Stos.*, 6, 15 (1962).
6. Szaniawski, A., *Arch. Mech. Stos.*, 5, 16 (1964).
7. Szaniawski, A., *Arch. Mech. Stos.*, 3, 16 (1964).